De la holomorficidad, hiperfunciones y series.
Cómo el campo complejo auxilia a la realidad.

H. A. Di Rado & P. A. Beneyto. Fac. De Ingeniería. UNNE

Objetivo:

El objetivo del presente artículo es demostrar como puede aproximarse una función totalmente discontinuas con la ayuda de funciones enormemente suaves y continuas como lo son las funciones holomorfas.

Además, según se avance en la explicación de las ideas generales, se recurrirá al desarrollo de funciones periódicas en una suma de funciones oscilatorias simples, es decir senos y cosenos (a estas ondas básicas se las llama harmónicas en física) introducidas por **Joseph Fourier** (1768-1830) entre 1804 y 1807 en estudios sobre propagación del calor. Esta serie es por supuesto también suave y continua.

Pero también es objetivo del presente, resaltar el valor del campo complejo como herramienta para resolver problemas del campo real. Justamente, una de las mas poderosas nociones que surgen de dicho campo, es el de hiperfunciones, las cuales pueden formularse, como se mostrará aquí, en términos de funciones holomorfas.

Se ha incluido al final del artículo, un breve glosario con los conceptos mas usados durante el presente artículo.

Introducción:

El presente artículo surge como respuesta a una propuesta realizada por Roger Penrose[12] de resolver la aproximación a la onda cuadrada como caso particular del estudio de las descomposiciones de Fourier y las hiperfunciones (ver glosario).

Las funciones complejas-analíticas (holomorfas), ofrecen una incomparable suavidad que hubiera deleitado al mismo Euler, considerando que para los tiempos de Euler, una función debería ser algo muy suave, que pudiera escribirse explícitamente o en forma de series. En la actualidad en cambio, ha cobrado fuerza el término *mapeo* desde un conjunto denominado dominio hacia otro denominado resultado.

Sin embargo, los problemas de ingeniería muchas veces encuentran limitaciones en este tipo de fundones por la falta de *flexibilidad* producto de su unicidad en diferentes regiones vecinas (en otras palabras, su derivabilidad).

Cuando se trata el problema de propagación de ondas (muy común en física o ingeniería), éstas pueden, o deberían poder, cambiar en cualquier momento sino una *señal* no podría ser enviada (la uniformidad no llevaría información, solo ruido).

Fourier se preocupó por la descomposición de vibraciones periódicas en sus componentes o *tonos puros* (en física muchas veces se las denomina harmónicas).

Un ejemplo es:

$$f(\chi) = C + a_1 \cos(w\chi) + b_1 sen(w\chi) + \ldots.$$

Con $w = frecuencia = 2\dfrac{\pi}{L}$ y $L = período$

H.A. DiRado y P.A. Beneyto

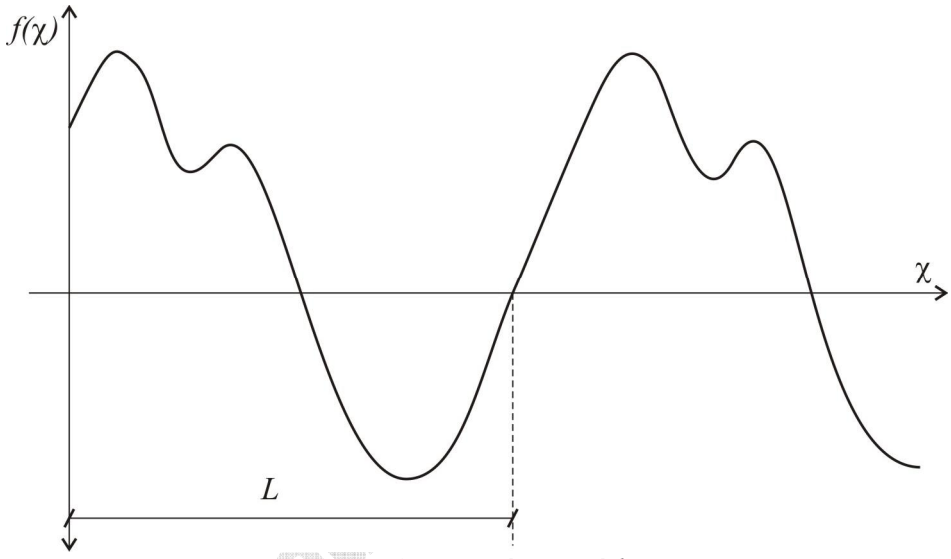


Figura 1: Función periódica

Serie de Laurent para la onda cuadrada[1]:

En los comienzos del siglo XIX, Fourier produjo un gran impacto cuando enunció que la siguiente señal:

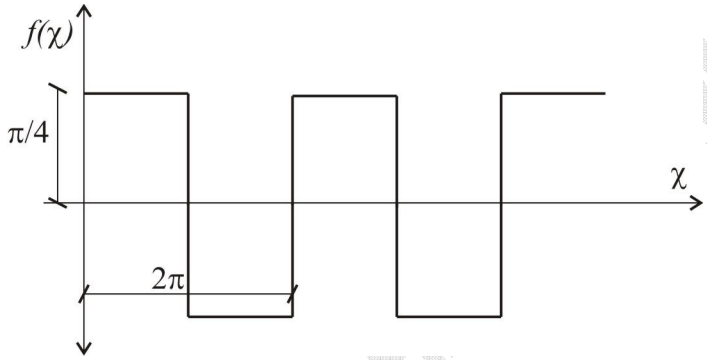


Figura 2: Función periódica "onda cuadrada".

podía ser aproximada por la siguiente serie:

$$s(x) = sin(\chi) + \frac{1}{3}sin(3\chi) + \frac{1}{5}sin(5\chi) + \frac{1}{7}sin(7\chi) + ... \qquad (1)$$

Para poder verificar la propuesta, se debe primeramente hallar la serie de Laurent para esta serie de Fourier. La mencionada serie se obtiene de sustituir en la ecuación (1), la relación de Euler-Cotes:

$$e^{iA\chi} = cos(A\chi) + i.sen(A\chi) \qquad (2)$$

Con $e = N°Euler$ y $A = constante$

En la expresión resultante de este reemplazo, se deberá considerar un cambio en la variable "χ" por "z" según=> $z = e^{iA\chi}$. Luego de bastante álgebra; se obtiene una serie del tipo

$$2is(x) = S(z) = ... - \frac{1}{5}z^{-5} - \frac{1}{3}z^{-3} - z^{-1} + z + \frac{1}{3}z^{3} + \frac{1}{5}z^{5} + ... \qquad (3)$$

Como se puede apreciar, es una serie de potencias con la adición de términos negativos y esto se conoce como serie de Laurent, aquí aplicada a la ecuación (1). Aunque la expresión de Laurent involucra complejos, no es más que otra versión de la ecuación (1) que es función de variable real (χ). Esta aparición súbita de la variable compleja puede interpretarse como si el eje real se hubiera "enrollado" sobre el círculo unitario en el plano complejo $"z"$, haciendo coincidir por simplicidad, el período w/L con la circunferencia del círculo unitario, según se puede apreciar el figura 3:

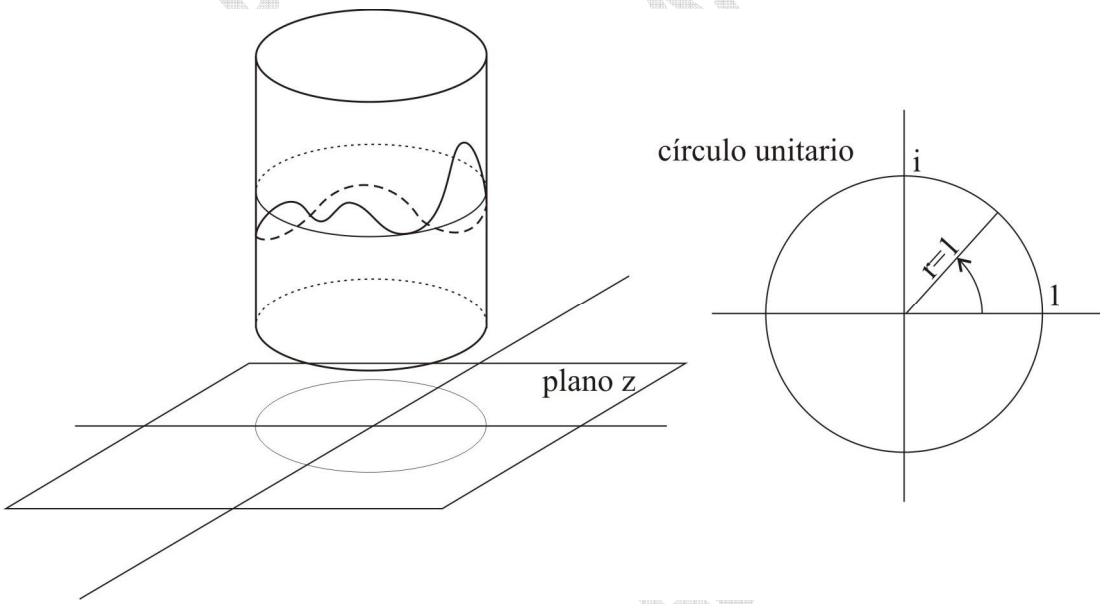


Figura 3: El eje real "enrollado" sobre el círculo unitario en el plano complejo".

Esta sustitución no es trivial. Si $S(z)$, ahora de variable compleja, es holomorfa, puede hacerse *continuación analítica* y extender una función, originalmente circunscripta al círculo unitario, hacia su interior. Esta continuación es una de las virtudes casi mágicas de este tipo de funciones pues permite analizar convergencias que se expondrán en breve.

<u>Descomposición de la serie de Laurent</u> [(2)]

Una función de variable compleja cualquiera $F(z)$, semejante a la serie descripta en la Eq. (3), puede dividirse en dos partes: una denominada de *frecuencia negativa* F^- (con los exponentes positivos) y otra denominada de *frecuencia positiva* F^+ (con los exponentes negativos):

En general, la expresión (3)

$$F^- = \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + ... \qquad \text{"Frecuencia negativa"} \qquad (4)$$

$F^{+} = \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + ...$ "Frecuencia positiva" (5)

Con $F(z) = F^{-} + \alpha_0 + F^{+}$ siendo $\alpha_0 = cte$ (6)

Esta división es muy usada en mecánica cuántica pues permite analizar lo que ocurre "fuera" de círculo a partir del propio círculo. Como se dijo, sin entrar en detalle, las dos partes F^{+} y F^{-} convergen en le plano z según la figura. Se asume que la serie de frecuencia positiva converge para un valor del radio dado, "A" para este ejemplo:

F^{-} converge para R<A

Como contrapartida y considerando los exponentes de cada parte (F^{+} y F^{-}), la serie de frecuencia positiva convergerá para un valor:

F^{+} converge para R>B

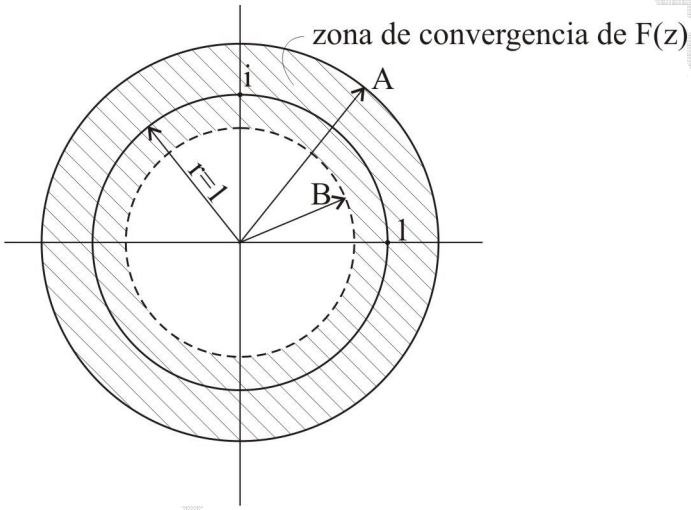


Figura 3: Zona de convergencia en torno al círculo unitario.

Ambos, "B" y "A", estás relacionados según se verá en el párrafo que sigue.
Simplemente y a modo de ampliar la cuestión, puede pensarse en la esfera de Riemann[3] para comprender la cuestión de la convergencia. Realizando la proyección del plano complejo sobre la esfera, se ha situado en la parte inferior el polo correspondiente a la función "z". Esto puede verse en la figura 4.

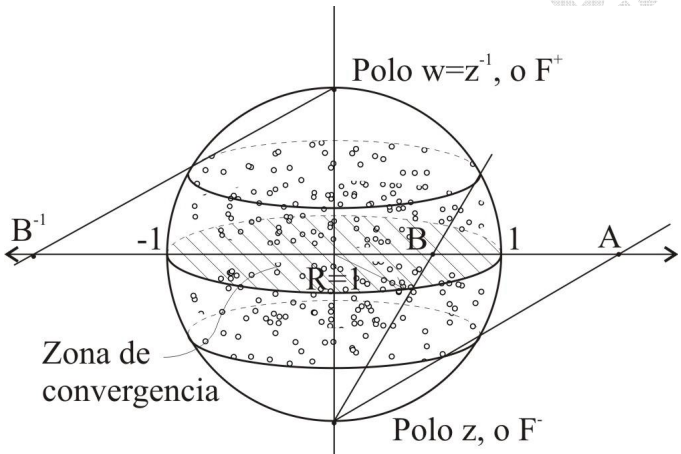


Figura 4: Convergencia en la esfera de Riemann.

La función F^{+} puede considerarse regida por otra variable que llamamos $w = 1/z$, pues lleva exponente negativo en "z", eso hace que el polo en la esfera de Riemann sea opuesto al de "z".
Si F^{-} converge en $R < A$, la serie F^{+}, tratándola igual, converge para un valor B^{-1} (lo llamamos así) por lo que valdrá también $R < B^{-1}$.

Pero eso implica que, mirando desde "z", como $\frac{1}{B^{-1}} = B$, se puede decir que la convergencia se da para $R > B$. Esto origina la "faja" (zona de convergencia) marcada por "puntos" en la esfera y "rayas" en el grafico previo.
Sin embargo no profundizaremos mas en cuestiones de convergencia, pues solo es introductorio al concepto que se usara aquí: cuando la función que se desea aproximar, $f(\chi)$, no es analítica, el anillo se "encoge" hasta el círculo unitario.

El caso que se desea tratar en este trabajo, la serie "onda cuadrada", justamente cae dentro de este grupo (no analítica). Es más, esta onda, no solo no es analítica sino además discontinua y no diferenciable. Por lo anterior, parecería imposible su aproximación a través de funciones holomorfas. Pero justamente la magia de los complejos, juntamente con la eficiencia de Fourier, harán posible lo dicho.

Retomando ahora la ecuación (3), si se observa las Eqs. (4) y (5), esta puede ser separada, al igual que como se hizo con $F(z)$, en la parte con frecuencia positiva y con frecuencia negativa (atendiendo exclusivamente a los exponentes):

$$S^- = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + ... = \frac{1}{2}log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{7}$$

$$S^+ = ... - \frac{1}{5}z^{-5} - \frac{1}{3}z^{-3} - z^{-1} = -\frac{1}{2}log\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) \tag{8}$$

con $S(z) = S^- + S^+$ (cte = 0). Ambas convergencias [4] no se detallan aquí.

<u>Amplitud de la señal onda cuadrada usando la serie de Laurent</u>

A continuación se probará que las funciones S^+ y S^- difieren entre sí por $\pm \frac{1}{2} i\pi$.
Para esto, se realizará el siguiente cambio de variable (notar que es W mayúscula, diferente de $w = \frac{1}{z}$, usado anteriormente)

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = W \quad => \quad \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right) = -W \tag{9}$$

Así

$$S^- = \frac{1}{2}log\,W \qquad \text{y} \qquad S^+ = -\frac{1}{2}log(-W) \tag{10}$$

Recordando que el logaritmo es una función multivaluada si se lo toma en campo complejo (que contiene al eje real), se puede escribir ("n" entero)

$$m = log(W);\ \mathrm{m} = log(W) + 2\pi\, in \quad \text{con} \quad log(W) = log(r) + i\theta \tag{11}$$

Esta última expresión, deviene de la fórmula (2) (Cotes-Euler).
Para visualizar el problema, analizaremos la naturaleza del logaritmo en el plano complejo:

H.A. DiRado y P.A. Beneyto

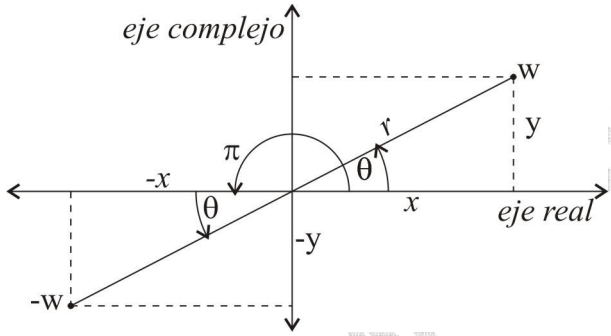


Figura 5: El complejo "W" y su representación polar y cartesiana.

En coordenadas cartesianas, los números *"W"* y *"-W"* serán:

$$W = x + yi \quad \text{y} \quad -W = -x + (-y)i$$

en coordenadas polares

$$W = [r, \theta]\ ; \qquad -W = [r, \theta + \pi] \Rightarrow \tag{12}$$

Considerando la ecuación (10), la última de la. (11) y la (12)

$$\left.\begin{array}{l} log(W) = log(r) + i\theta \\ \\ log(-W) = log(r) + i\theta + i\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(S^- + S^+) = log(W) + [-log(-W)] = -i\pi \\ \\ 2(S^- - S^+) = log(W) - [-log(-W)] = +i\pi \end{array} \tag{13}$$

$$S^- \pm S^+ = \pm \tfrac{1}{2} i\pi \tag{14}$$

Recordando la Ec. (3)

$$s(\chi) = \pm \tfrac{\pi}{4} \tag{15}$$

Este valor calculado, verifica la amplitud de la onda expresada en la Fig. 2.

<u>Campo de validez de S^+ y S^-. Transformación de variable.</u>

Recurramos ahora a otra transformación de variables.

$$t = \frac{(z-1)}{iz+i} \tag{16}$$

Esta sustitución es conocida por ser un caso particular de uno más general, llamado transformación bilineal de Möbius. Es muy usada en mecánica cuántica porque generalmente la variable "t" es representativa del "tiempo" y mediante esta expresión puede extenderse el concepto de tiempo mas allá de la experiencia real, pudiendo variar

F.A. DiRado y P.A. Beneyto

éste de "+- ∞" (infinito) quedando contenido en el plano complejo, tal como lo muestra la fig. 6. La Ec. (16) es una transformación conforme (lineal) y por ende holomorfa:

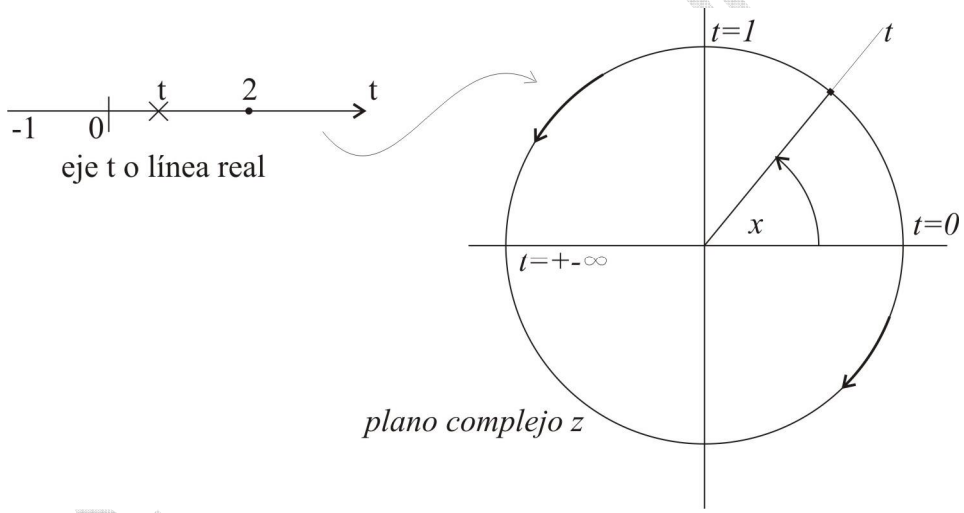


Figura 6: Representación del eje temporal usando el círculo unitario complejo.

$$t = \frac{(z-1)}{iz+i} \qquad \text{ó} \qquad t = tg(\tfrac{1}{2}x) \quad \text{con} \quad z = e^{i\chi} \tag{17}$$

Se puede apreciar en la Fig. 6, que aparece concepto de $t < 0$ en la semicircunferencia inferior, conformando una visión imprescindible en mecánica relativista.
Pero para nuestro caso, podemos verlo como un *cambio conveniente*, que podría generalizarse aún más, considerando una extensión holomorfa de "*t*" de modo de transformar el eje real "*t*" en un plano complejo y considerar valores *fuera del eje real* (implícitamente estamos aceptando la idea de un tiempo complejo, algo usado en teoría sobre el origen del universo[13]).
Para comprender mejor esta *extensión*, es conveniente graficar una nube de puntos en el "plano complejo *t*" y su transformación, según Ec. (17), al "plano complejo *z*" según se aprecia en la Fig. 7. Para un conjunto de líneas paralelas a los ejes reales y complejos del plano "*t*", en el plano "*z*" obtendremos un conjunto de curvas como se muestran a continuación [5]. El semiplano superior del plano complejo "*t*" queda enteramente comprendido *dentro* del círculo unitario del plano complejo "*z*":

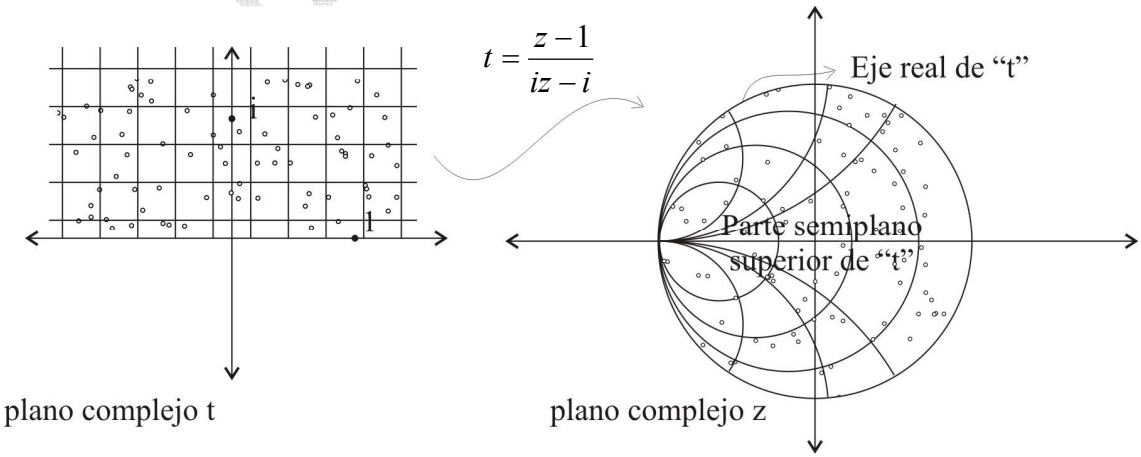


Figura 7: Transformación bilineal conforme (holomorfa).

Sustituyendo la Ec. (17) para "*z*" en las Ecs. (7) y (8), resulta

$$S^- = -\frac{1}{2} log\, t + \frac{1}{2} log\, i \qquad \text{Válido dentro del círculo en el plano } z \qquad (18)$$

$$S^+ = \frac{1}{2} log\, t + \frac{1}{2} log\, i \qquad \text{Válido fuera del círculo en el plano } z \qquad (19)$$

Para la adecuada interpretación de este reemplazo, se realiza la siguiente reflexión: La frecuencia positiva (S^+) puede reescribirse:

$$S^+ = -\frac{1}{2} log \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{2} log \frac{1+w}{1-w} \qquad (20)$$

Recordando Ec. (7) y juntándola con la Ec. (20), puede verse que S^- se expresa directamente en función de "z" y sus potencias, y S^+ queda en función de potencias positivas pero de "w" (por ser potencias negativas o sea $w = z^{-1}$). Podríamos suponer que tenemos dos series semejantes, una en función de "*z*" y la otra en función de "*w*" Este es el concepto que se presentó en la fig. 4, cuando se analizó la esfera de Riemann. Allí se dijo que, si se mira exclusivamente desde el polo inferior, la serie de frecuencia positiva converge para R>B. Asumamos que B=1, todos los puntos de la serie caen *fuera* del círculo unitario del "plano complejo *z*". Por el contrario y siempre para B=1, la serie de frecuencia negativa, quedará siempre *dentro* del círculo unitario del mencionado plano.
Cruzando este razonamiento con la información de Fig. 7, esto implica que S^- se relaciona con el semiplano superior del plano complejo "t" y S^+ con el inferior.

S^- Válido dentro del círculo unitario en el plano complejo *z*.
S^+ Válido fuera del círculo unitario en el plano complejo *z*.

De todos modos, acá, la señal a aproximar (la onda cuadrada) con series no es analítica por lo cual, el anillo de convergencia se reduce a la circunferencia del circulo unitario por lo que la extensión holomorfa de "t" también se reduce al círculo (su circunferencia).

<u>Las oscilaciones de *s(χ)*. Hiperfunción.</u> .
Analizando la variación de Ecs. (18) y (19) en función de "t", se tendrá que: $S^- = 0_{(t=i)}$ y $S^+ = 0_{(t=-i)}$. Moviéndose sobre el eje (real) de "t" positivo se tiene que $S^- + S^+ = ½\pi\, i$; y haciéndolo el eje "t" negativo, vale $S^- + S^+ = -½\pi i$.
Para demostrar esto, se debe volver a las propiedades del logaritmo usadas en la Ec. (13):

$$\text{Si } log(W) = q \text{, entonces } log(-W) = q + \pi\, i \qquad (21)$$

H.A. Dirado y P.A. Beneyto

Pero la condición especial que presenta el logaritmo de números complejos, permite encontrar mas de una respuesta para la misma pregunta: Consideremos, en primer lugar, la expresión $e^{-2\pi i}$. Esta potencia equivale a $\frac{1}{e^{2\pi i}}$. Que número complejo es representado por $e^{2\pi i}$?. Recurriendo a la representación polar de complejos usadas en la Ec.(12), el número es $e^{2\pi i} = [\, r = 1, \theta = 2\pi \,] = 1$, que obliga a $e^{-2\pi i} = 1$, también.
Por lo tanto es lícito escribir que

$$log(-W) = q + \pi\, i \Rightarrow e^{log(-w)} = e^{q}.e^{\pi i} = e^{q}.e^{\pi i}.e^{-2\pi i} = e^{q}.e^{-\pi i} = q - \pi\, i \quad (22)$$

Como puede notarse, nuevamente es confirmada la *ambigüedad* del logaritmo de números complejos (función multivaluada).

Como buscamos $S(z)$, recurrimos a Ec. (3) y se tiene que:

$$2is(\chi) = S(z) = S^{+} + S^{-} \quad (23)$$

A partir de Ecs. (18) y (19

$$S^{-} + S^{+} = \frac{1}{2}\left[-log\, t + log\, t\right] + log\, i \quad (24)$$

Sobre el eje negativo de *"t"*, modificamos la expresión (24) así:

$$S^{-} + S^{+}{}_{eje\ \ t<0} = \frac{1}{2}\left[-log(-t) + log(-t)\right] + log\, i \quad (25)$$

para evitar la solución trivial, nos valemos de la ambigüedad logarítmica, reflejada en Ecs. (21) y (22):

$$S^{-} + S^{+}{}_{eje\, t<0} = \frac{1}{2}\left[-(log\, t + \pi\, i) + (log\, t - \pi\, i)\right] + log\, i = \frac{1}{2}\left[-2\pi\, i\right] + log\, i$$

$$S^{-} + S^{+}{}_{eje\, t<0} = -\pi\, i + \frac{\pi}{2} i = -\frac{\pi}{2} i \quad (26)$$

Para la anterior, se ha tomado al numero *"i"*, en su representación polar $e^{\frac{\pi}{2} i} = [\, r = 1, \theta = \pi/2 \,] = i$.
Sobre el eje "t" positivo, la solución de Ec. (24) es trivial:

$$S^{-} + S^{+}{}_{eje\ \ t>0} = log\, i = \frac{\pi}{2} i \quad (27)$$

Ahora, calculando $S(\chi)$ a partir de Ecs. (23), (26) y (27):

$$\text{Eje } t > 0 \Rightarrow s(\chi) = \pi/4 \quad (28)$$

$$\text{Eje } t < 0 \Rightarrow s(\chi) = -\pi/4 \quad (29)$$

Pero el eje positivo de *"t"* es la porción superior de la circunferencia en plano complejo *"z"* y el negativo, la semicircunferencia inferior, tal como se muestra en fig. 8:

H.A. DiRado y P.A. Beneyto

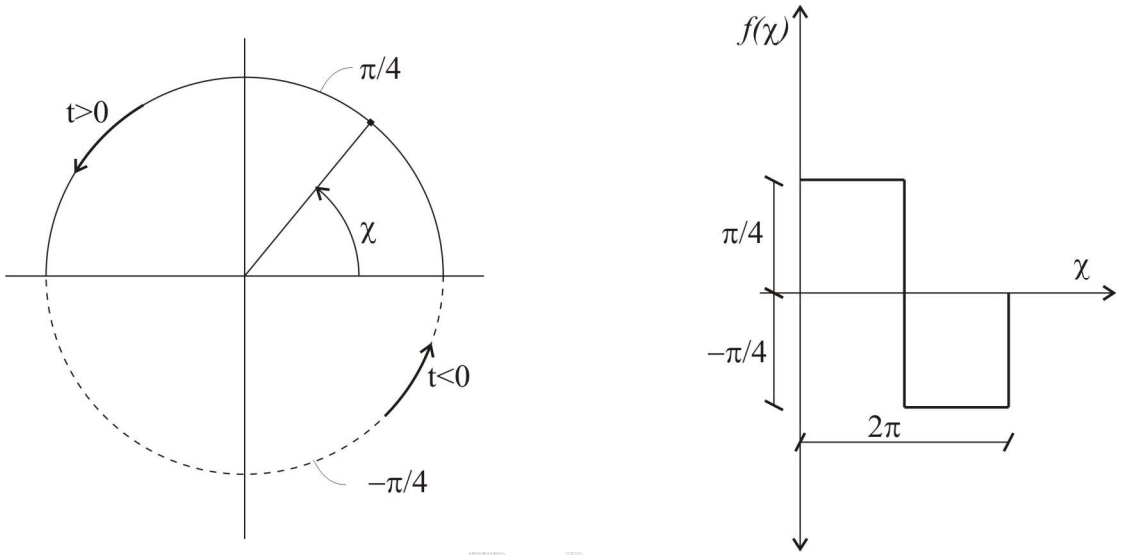


Figura 8: Generación de la onda cuadrada a partir de S^+ y S^- sobre el círculo unitario.

Aunque los valores de $S^+ + S^-$ estén en función *"t"* según Ecs. (18) y (19); se puede seguir la evolución de *s(χ)* en función de la variable *"χ"* teniendo en cuenta la Ec. (17) o simplemente siguiendo la relación *"t-χ"* indicada en la Fig. 6. Concretamente, cuando $0< \chi <\pi$ corresponde a $t>0$, y cuando $\pi < \chi <2\pi$ corresponde a $t<0$. Así, teniendo en cuenta las Ecs. (28) y (29), se irá describiendo la onda cuadrada tal como muestra la Fig.8.

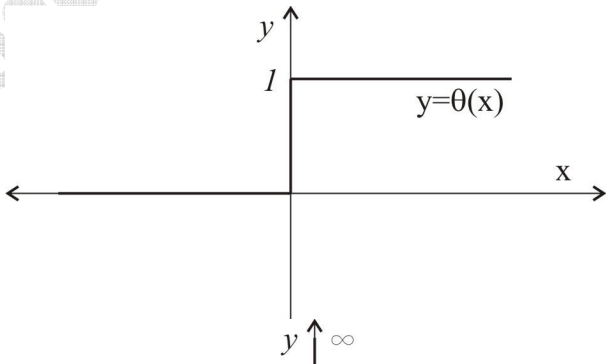
Además, algo muy importante: S^+ o S^- son funciones holomorfas no definidas en $z = \pm 1$ según se muestra en las Ecs. (7) y (8); pero la operación $S^- + S^+$ permite *saltar* la indeterminación y generar la onda cuadrada.

Justamente, esos puntos de indeterminación, son los que provocan la *contracción* del área de convergencia al circulo (circunferencia) unitario, algo que ya habíamos anunciado.

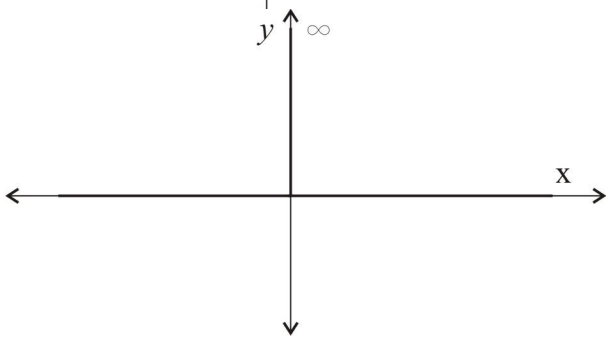
Este tipo de saltos es lo que origina la idea de **hiperfunción** sobre el círculo unitario. Las hiperfunciones son el tipo mas general de funciones e incluyen a las conocidas como distribuciones $(C^{-\infty})$.

Ellas no son funciones en el sentido de "mapear" un dominio "A" sobre otro conjunto "B" llamado imagen, basta pensar que la derivada de la función "Heaviside" (Fig. 9 arriba)

$$\theta(x) = \frac{|x| + x}{2x}$$



Es el delta de Dirac $\delta(x)$ (Fig. 9 abajo),
No hay "mapeo" posible



H.A. Direto y P.A. Benavitz

Figura 9: Hiperfunciones.

Pero ambas funciones son en realidad hiperfunciones, que pueden expresarse nuevamente en el plano complejo como un *par* (pensar en que las hiperfunciones son un *par* de funciones holomorfas).

$$\theta(x) = \left(\left| \frac{1}{2\pi i} log\, z; \frac{1}{2\pi i} log\, z - 1 \right| \right) \tag{30}$$

$$\delta(x) = \left(\left| \frac{1}{2\pi i z}; \frac{1}{2\pi i z} \right| \right) \tag{31}$$

La representación en el plano complejo se ve en la fig. 10:

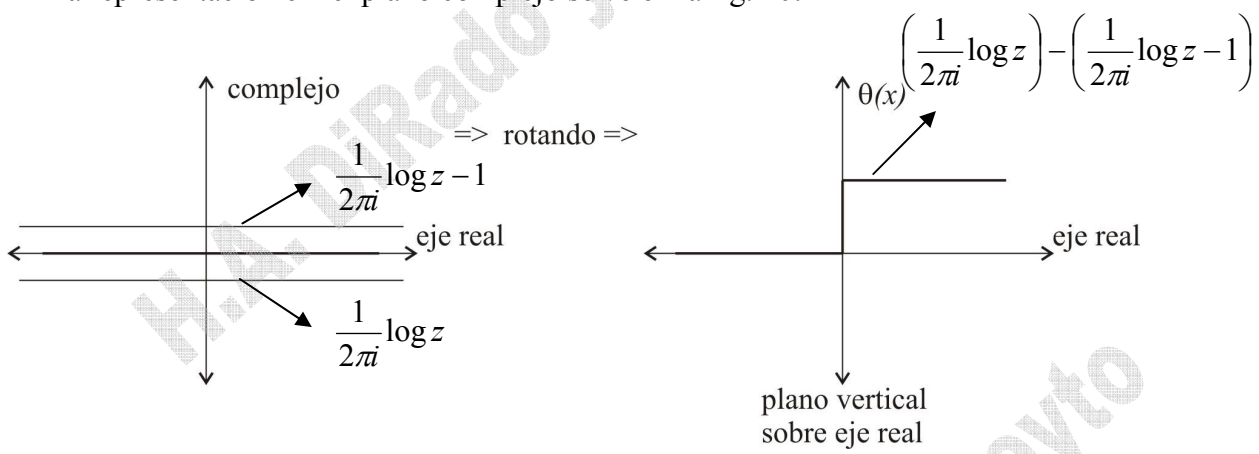


Figura10: Hiperfunciones en el plano complejo.

Aquí, las funciones dan el "salto" sobre el eje real en lugar de hacerlo sobre el círculo unitario como en nuestro ejemplo de onda cuadrada.
Como podrá suponerse, el impacto producido por Fourier en el siglo XIX fue muy importante: la onda cuadrada podía ser representada en el campo real por su serie y en el complejo (en el círculo unitario) por la de Laurent con la división en S^+ y S^-.
Es muy impactante también, el hecho de que una hiperfunción, paradigma de la flexibilidad, se defina en términos de funciones holomorfas (analíticas) que originalmente constituían un problema por su rigidez….maravillas del campo complejo que Euler hubiera apreciado mucho…

H.A. DiRado y P.A. Beneyto

Glosario:

- *Funciones analíticas* [6]: Son funciones derivables C^{∞} y además se las pueden expresar como serie de potencias.
- *Funciones holomorfas* [7]: Son funciones de variable compleja de extrema suavidad y analíticas. La holomorficidad se prueba a través de las ecuaciones de Cauchy Riemann pero además se las identifica por ser una transformación conforme (de rotación o traslación, sin reflexión). Implica la existencia de una serie de potencia en torno a un punto del dominio lo que permite realizar la *continuación analítica* que no es otra cosa que una extensión del dominio de validez de la función. Como aspecto negativo, la continuación analítica le imprime rigidez a la función. Muchos consideran que son el eje central sobre el que gira el estudio del campo complejo.
- *Esfera de Riemann*: Superficie compacta que permite la representación del plano complejo con inclusión de puntos ubicados al "∞". Una transformación holomorfa puede verse plasmada sobre el plano complejo o sobre la proyección conforme sobre la esfera [8]. Especial interés presenta el caso particular de la transformación de Möbius materializado en la función inversa. En la esfera puede verse como una rotación de 180º sobre el eje real.
- *Convergencia de series en campo complejo* [4]: Cuando una serie de potencias se expresa sobre variable compleja, puede presentar una zona de convergencia en el plano complejo representado por un círculo que será de radio cero cuando la serie diverge y de radio infinito cuando converge para todo el dominio. Muchas de estas series de potencia, expresadas ahora sobre el campo real, presentan una dificultad sensiblemente mayor a la hora de definir su convergencia.
- *Funciones multivaluadas* [9]: En un lenguaje muy sencillo, una función multivaluada es aquella a la que cada insumo está asociado a más de un resultado. Quizás uno de los ejemplos mas sencillos sea el de $b^{1/2}$ ($b \neq 0$) al que le corresponden dos valores iguales y de diferente signo. En particular, la función z = log (w) (con "z" , "w" complejos y "log" logaritmo natural) presenta una ambigüedad que se basa en la identidad de Euler[10] para demostrar que z = log (w) = log (w) + i 2∏ n ("n" entero).
- *Hiperfunciones* [11]: Las hiperfunciones son funciones generalizadas que se caracterizan por un salto o diferencia (más que una suma) de dos funciones holomorfas sobre un conjunto abierto a ambos lados del dominio generando esa idea de salto entre funciones. Por ejemplo, una hiperfunción sobre la línea real será la diferencia entre una función holomorfa en el semiplano superior (del plano complejo) y otra definida en el semiplano inferior. La hiperfunción se especifica como el par (S^+, S^-) donde S^+ es holomorfa sobre al semiplano superior y S^- sobre el semiplano inferior. La hiperfunción "S^+- S^-" quedaría definida sobre la línea real.

Bibliografía:

(1) Boyce & Di Primo "elementary differential equation and boundary value problems" . (John Wiley 2005)
(2) Bayley T N, Ehrenpreis L & Wells R. "Weak solution of the massless field equation." Proc. Roy. Soc. Lon. 403-25. 1982
(3) Brown, James "complex Variable an applications" (McGraw hill 1989)

(4) Needham T. “Visual Complex Analysis” (Oxford University Press 1997)
(5) Mathews & Rusell “Complex Analysis for mathematics and engineering” (J & B USA 2006)
(6) Ulrich P. “the proof of Laurent Expansion by..”. The history of modern mathematics III (Boston, 1994).
(7) Kreyzig E. “Advance engineering mathematics”. (Wiley, 2005)
(8) Ver http://www.dcs.gla.ac.uk/~bunkenba/CC/CC.html
(9) Aubin J.P. “differential inclusions, set valued….” (Springer Verlag, 1984)
(10) Nahin, Paul J., “Dr. Euler's Fabulous Formula: Cures Many Mathematical Ills” (Princeton University Press, 2006).
(11) Hörmander, Lars “The analysis of linear partial differential operators, Volume I: Distribution theory and Fourier analysis”, (Springer-Verlag 2003)
(12) Penrose R. “The road to reality”, (Vintage books, 2005)
(13) Hopkins, Stephen. “El universo en una cáscara de nuez”, (Planeta, 2002)

H.A. DiRaco y P.A. Balreyra